Examen Topologie L_2 correction

Exo 1 : (06)

1) • $A =]0,1] \cup \{2\}$

$\mathring{A} = \{x \in A;\ A \in \mathcal{V}(x)\} = \boxed{]0,1[= \mathring{A}}$

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R},\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ A \cap V = \phi\}$ (1,5)

$\boxed{\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}}$, $\boxed{Fr\, A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0,1,2\}}$

• $\boxed{\mathring{B} = \phi}$, $\boxed{\bar{B} = B}$; $\boxed{Fr(B) = B}$ (1,5)

2) • A n'est pas fermé n'est pas ouvert

(1,5) $A \neq \bar{A}$ $\mathring{A} \neq A$

n'est pas ~~Com~~ compact (n'est pas fermé)

• B n'est pas ouvert ($\mathring{B} \neq B$) (1,5)

B est fermé $\bar{B} = B$.

B est compact (fermé borné)

Exo2 (06) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x+2 & x > 1 \end{cases}$

• 1) $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ n'est pas continue en effet :

soit $U =]-3, 2[\in \tau_u$ (2)

$f^{-1}(U) =]-3, 1] \notin \tau_u$

2) $f^{-1}(]a,b]) = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \in]a,b]\}$

$$f^{-1}(]a,b]) = \begin{cases}]a,b] \in \tau & \text{si } a < b \leq 1 \\ ]a,1] \in \tau & \text{si } a < 1 < b \leq 3 \\ ]a, b-2] \in \tau & \text{si } a < 1 < 3 < b \\ \phi \in \tau & \text{si } 1 \leq a < b \leq 3 \\ ]a-2, b-2] & \text{si } 3 \leq a < b \\ ]1, b-2] \in \tau & \text{si } 1 \leq a < 3 < b \end{cases}$$

(04)

Alors :

Dans chaque cas $f^{-1}(U) \in \tau$

Alors $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$

est cont.

Exo.3 : (08)

I a) d est une distance sur E :

• 1) $d(f,g) \geq 0$.

2) $d(f,g) = 0 \Rightarrow \sup_{[0,1]} |f-g| = 0$

Alors,

$0 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \geq |f(x) - g(x)| \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Alors $|f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f \equiv g$

3) $d(f,g) = d(g,f)$ (02)

4) $d(f,h) = \sup_{[0,1]} |f(x) - h(x)|$

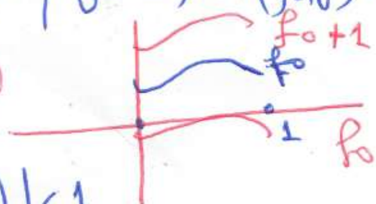
$= \sup_{[0,1]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|$

$\leq \sup_{[0,1]} \left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \right)$

$= d(f,g) + d(g,h)$

I-b) $B(f_0, 1) = \{f \in E,\ d(f_0, f) < 1\}$

$f_0 \in E$ (02)



$\sup_{[0,1]} |f(x) - f_0(x)| < 1$

$\Rightarrow -1 + f_0 < f(x) < 1 + f_0$

$B(f_0, 1) =$ les fcts $\in E$ et comprises entre $f_0 + 1$ et $f_0 - 1$.

II. a) (f_n) de Cauchy.

$$f_p(t) - f_q(t) = \begin{cases} p-q & 0 \leq t \leq \frac{1}{p^2} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} - q & \frac{1}{p^2} \leq t < \frac{1}{q^2} \\ 0 & \frac{1}{q^2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$e(f_p, f_q) = \int_0^1 |f_p - f_q| \, dt$$

$$\boxed{e(f_p, f_q) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$ 0,2

$$\lim_{p,q \to +\infty} e(f_p, f_q) = 0.$$

II.b) par absurde $\mathcal{C}(E, d)$ complet et (f_n) de cauchy Alors (f_n) converge. ie

$$\lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 |f_n - f| = 0$$

de plus $$\int_{\frac{1}{n^2}}^1 |f_n - f| \leq \int_0^1 |f_n - f| = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{n^2}} \underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{t}} - f\right|}_{\geq 0} = 0$$ 0,2

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \forall t \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right]$$

$f \in (C[0,1], \mathbb{R})$ contradiction

car $\frac{1}{\sqrt{t}} \notin (C[0,1], \mathbb{R})$