

1/3

Consigne type d'examen du module optimisation sans contraintes.

Exercice 01 : 08 Pts

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste à étudier la continuité de f en $(0,0)$. Posons $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, $r > 0$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

(Car $|\cos^2 \theta \sin \theta| < 1$)

Alors f continue sur \mathbb{R}^2 .

03, 1/2) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

Pour $(x,y) = (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \end{pmatrix}$$

3) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car quotient de deux fonctions différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions la différentiabilité en $(0,0)$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f((0,0) + (h_1, h_2)) - f(0,0) - f_x(0,0)h_1 - f_y(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})^3}$$

2/3

Posons $h_1 = r \cos \alpha$ et $h_2 = r \sin \alpha$ $r > 0$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$$

ne s'admet pas une limite

d'où f n'est pas en $(0,0)$, ce qui veut dire que f n'est pas différentiable sur \mathbb{R}^2

01) 4) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(1,0) + o(h_1, h_2)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(0h_1, 0h_2) - h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$

Exercice 02

05 pts
04) 1) $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{6}y^3$
 $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \\ y = 2x \end{cases}$$

les points critiques de f sont $(0,0), (\frac{1}{2}, 1)$

03) 2) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$

Pour $y=0$ $\det(H_f(x,0)) = -1 < 0$
donc le point $(0,0)$ est un point selle.

Pour $y=1$ $\det(H_f(x,1)) = 1 > 0$ et $\text{tr}(H_f(x,1)) = 3 > 0$
le point $(\frac{1}{2}, 1)$ est minimum local.

Exercice 03

02) 01) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$
 $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$

3/3

$$Hf(x, x_2) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = A \quad (0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$$

$\det(A) = 16 > 0$ et $\text{tr}(A) = 12 > 0$

A matrice symétrique définie positive

f est une forme quadratique définie positive

donc f est strictement convexe. Alors, f admet

un unique minimum.

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (0,1)$$

(0,0) est le minimum global de f

e) La méthode du gradient à pas optimal s'écrit

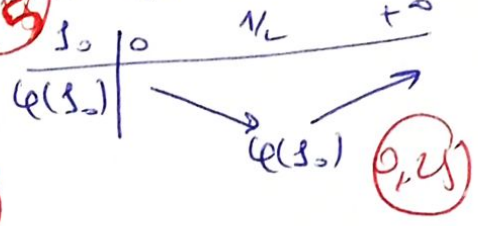
x_0 est donné

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \beta_k \nabla f(x_k) \\ f(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) = \min_{\beta \geq 0} f(x_k - \beta \nabla f(x_k)) \end{cases}$$

Première itération : on a $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (0,1)$

$$x_0 - \beta_0 \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 - 4\beta \\ 3 - 4\beta \end{pmatrix}, \quad \varphi(\beta_0) = f(x_0 - \beta_0 \nabla f(x_0)) = 32\beta^2 - 32\beta + 10$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = x_0 - \beta_0 \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0,1)$$



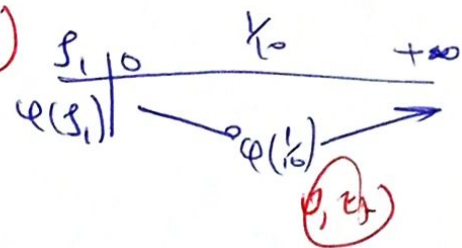
deuxième itération

$$\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (0,1)$$

$$x_1 - \beta_1 \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 4\beta \\ 1 - 4\beta \end{pmatrix} \quad (0,1)$$

$$\varphi(\beta_1) = f(x_1 - \beta_1 \nabla f(x_1))$$

$$= 160\beta^2 - 32\beta + 2 \quad (0,1)$$



$$\beta_1 = \frac{1}{10}, \quad x_2 = x_1 - \beta_1 \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \quad (0,1)$$

Consul tation avec le directeur
29/01/2024 à 10:30