1/3

Corrigé type d'examen du module

optimisation sans contraintes.

Exercice 01 : 08 pts

08 pts

(1,5) 1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste à étudier la continuité (0,5) de f en (0,0). Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r>0$, (0,25)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \ (0,5) = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0 \ (0,25)$$

(car $|\cos^2\theta\sin\theta| < 1$) d'où f continue en (0,0) (0,25)

Alors f continue sur $\mathbb{R}^2$.

03 (2) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ (1,5) si $(x,y) \neq (0,0)$

Pour $(x,y) = (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \end{pmatrix}$$ (1) (1)

(02) 3) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (0,25) car quotient de deux fonctions différentiable dont le dénominateur ne s'annule pas. Etudions la différentiabilité en (0,0)

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - f_x(0,0)h_1 - f_y(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \ (1)$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \ (0,25)$$

Posons $h_1 = r\cos\alpha$ et $h_2 = r\sin\alpha$ $\quad r>0$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{r\to 0} \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$$ n'admet pas une limite (0,5)

d'où f n'est pas en $(0,0)$, ce qui veut dire que f n'est pas différentiable ~~dans~~ $\mathbb{R}^2$ (0,5)

(01) 4) $$\lim_{\theta\to 0} \frac{f((0,0)+\theta(h_1,h_2))}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{f(\theta h_1, \theta h_2)}{\theta} = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

Exercice 02 05pts

(02) 1) $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{6}y^3$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$$ (0,5)

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \\ y = 2x \end{cases}$$ (0,5)

les points critiques de f sont $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ (0,5)

(03) 2) $$H f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$$ (01)

Pour $y=0$ $\det(H_f(x,0)) = -1 < 0$

donc le point $(0,0)$ est un point selle. (01)

Pour $y=1$ $\det(H_f(x,1)) = 1 > 0$ ~~et~~ $\mathrm{trace}(H_f(x,1)) = 3 > 0$ (01)

le point $(\frac{1}{2}, 1)$ est minimum local.

Exercice 03

$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$

(02) 1)

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$ (0,5)

3/3

$Hf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = A$ (0,5)

$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$ $\det(A) = 16 > 0$ et $trace(A) = 12 > 0$

A matrice symétrique défini positive

f est une forme quadratique défini positive (0,5)

donc f est strictement convexe. Alors, f admet un unique minimum.

$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ (0,5)

$(0,0)$ est le minimum globale de f

2) La méthode du gradient à pas optimal s'écrit

(0,5) $\begin{cases} x_0 \text{ est donné} \\ x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \\ f(x_k - \rho_k \nabla f(x_k)) = \min\limits_{\rho_k > 0} f(x_k - \rho_k \nabla f(x_k)) \end{cases}$

Première itération : on a $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (0,25)

$x_0 - \rho_0 \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 - 4\rho \\ 3 - 4\rho \end{pmatrix}$, $\varphi(\rho_0) = f(x_0 - \rho_0 \nabla f(x_0)) = 32\rho_0^2 - 32\rho_0 + 10$ (0,5) (0,5)

ρ_0	0	1/2	+∞
$\varphi(\rho_0)$	↘	$\varphi(\rho_0)$	↗

(0,25)

$\rho_0 = \frac{1}{2}$ $x_1 = x_0 - \rho_0 \nabla f(x_0)$ (0,5)

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,5)

deuxième itération $\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (0,25)

$x_1 - \rho_1 \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 4\rho \\ 1 - 4\rho \end{pmatrix}$ (0,5)

$\varphi(\rho_1) = f(x_1 - \rho \nabla f(x_1))$

$= 160\rho^2 - 32\rho + 2$ (0,5) (0,25)

ρ_1	0	1/10	+∞
$\varphi(\rho_1)$	↘	$\varphi(1/10)$	↗

(0,25)

$\rho_1 = \frac{1}{10}$ $x_2 = x_1 - \rho \nabla f(x_1)$

$= \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ (0,5)

Consultation copie le lundi 29/01/2024 à 10:30