Corrigé type d'examen Module E.V.N

Exercice 01 : 12 pts

$$N(f) = \sup_{0 \le x \le 1} |x f(x)|$$

1) N est une norme :

(07)

(0,5) i) N est bien définie, car $|x f(x)| \ge 0$, $\forall x \in [0,1]$.

(02) ii) La séparation : Soit $f \in E$:

$N(f) = 0$ (0,5) c-à-d $|x f(x)| = 0$, $\forall x \in [0,1]$

$x f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, alors $f(x) = 0$ (0,5) pour $x \in]0,1]$

Comme f est continue sur $[0,1]$, alors $f(0) = 0$ (0,5)

d'où $f \equiv 0$. (0,5)

(01,5) iii) L'homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit $f \in E$

$$N(\lambda f) = \sup_{0 \le x \le 1} |x(\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{0 \le x \le 1} |x f(x)| = |\lambda| N(f)$$

(03) iv) L'inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$.

$$N(f+g) = \sup_{0 \le x \le 1} |x(f+g)(x)| = \sup_{0 \le x \le 1} |x f(x) + x g(x)|$$ (0,5) (0,5)

$$\le \sup_{0 \le x \le 1} (|x f(x)| + |x g(x)|)$$ (1)

$$\le \sup_{0 \le x \le 1} |x f(x)| + \sup_{0 \le x \le 1} |x g(x)|$$ (1)

$$= N(f) + N(g)$$

(02)

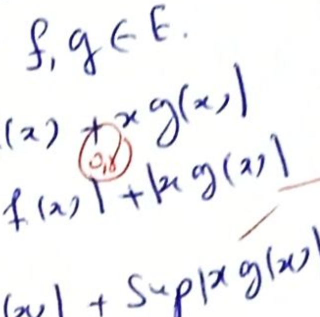
2) Pour tout $x \in [0,1]$

(1) $|x f(x)| = |x| |f(x)| = x |f(x)| \le |f(x)|$ $\forall x \in [0,1]$

(1) donc $\sup_{0 \le x \le 1} |x f(x)| \le \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| \Rightarrow N(f) \le \|f\|_\infty$

03

3) $\|f_n\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| = n$ (0,5)



$$x f_n(x) = \begin{cases} n x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$ (0,5)

$$N(f_n) = \sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| = 1$$ (1)

$\frac{2}{3}$ $\frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)} = n \xrightarrow{} +\infty$ (0,5), $\left(\frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)}\right)_n$ n'est pas bornée (0,5)

donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 02 (03 pts)

1) Vraie : (0,5) (01)

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

(0,5) $= \|x\|^2 + \|y\|^2$ $(\langle x,y\rangle = 0$ car $x \perp y)$

2) Vraie : (0,5) (02)

(0,25) i) $\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$, $\forall x \in E$ (produit scalaire)

(0,25) ii) Pour tout $x \in E$: $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(0,25) iii) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda\bar{\lambda})^{\frac{1}{2}}\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$

$= |\lambda|\,\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$

iv) Soient $x, y \in \mathbb{C}$:

(0,75)

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

$\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$ (Cauchy-Schwarz)

$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exercice 03 (05) pts

i) $\varphi : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$

$\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, on a

$|\varphi(f)(x)| = \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x t|f(t)|\,dt \leq \int_0^1 t\,|f(t)|\,dt$ (0,25)

(0,25) $\leq \int_0^1 t \sup|f(t)|\,dt = \|f\|_\infty \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ (0,25) (0,25)

(3/3)

Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ (0,25), alors φ est continue et $\|\varphi\| \leq \frac{1}{2}$

(0,25) (0,25)

Pour $f \equiv 1$, $f(t) = 1$ $\forall t \in [0,1]$ (0,25)

$\|f\|_\infty = 1$ (0,25) $\varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,dt = \frac{x^2}{2}$

$\|\varphi(f)\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left|\frac{x^2}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (0,25) alors $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$ (0,25)

ii) $\varphi : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$

$|\varphi(f)(x)| \leq \int_0^x t\,|f(t)|\,dt$ (0,25) $\leq \|f\|_\infty \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty$ (0,25)

$\|\varphi(f)\|_1 = \int_0^1 |\varphi(f)(x)|\,dx$ (0,25) $\leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty\,dx$

$= \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}\|f\|_\infty$ (0,25)

alors $\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{6}\|f\|_\infty$ (0,25)

(0,1)

Donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq \frac{1}{6}$.

Pour $f \equiv 1$ (0,25) $\|f\|_\infty = 1$ (0,25) $\varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$

$= \frac{x^2}{2}$

$\|\varphi(f)\|_1 = \int_0^1 |\varphi(f)(x)|\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{6}$ (0,5)

Alors $\|\varphi\| = \frac{1}{6}$ (0,25)

Consultation du note sera le lundi

29/01/2023 à ~~18:00h~~

10:00 heure