**1 ère année - Master GD - Module: Calcul différentielle 1 - Corrigé**

**Exercice 1**: (07 pts)

1- $\varphi$ est de classe $C^1$ (01)

$$Jac(\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos(\frac{y}{2}) \\ \frac{1}{2}\cos(\frac{y}{2}) & -1 \end{pmatrix}$$

on a $detJac\varphi(x,y) = 1 - \frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{y}{2}) \geq \frac{3}{4} > 0$, par conséquent la jacobienne est inversible et $D\varphi(x,y) \in Isom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ (02)

2- D'après le théorème d'inversion local, il suffit de montrer que $\varphi$ est injective supposons $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ alors

$$\begin{aligned} \varphi_(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2) \quad & \Rightarrow \sin(\tfrac{y_1}{2}) - x_1 = \sin(\tfrac{y_2}{2}) - x_2 \quad et \quad \sin(\tfrac{x_1}{2}) - y_1 = \sin(\tfrac{x_2}{2}) - y_2 \\ & \Rightarrow |x_1 - x_2| \leq |\tfrac{y_1}{2} - \tfrac{y_2}{2}| \quad et \quad |y_1 - y_2| \leq |\tfrac{x_1}{2} - \tfrac{x_2}{2}| \\ & \Rightarrow |x_1 - x_2| \leq \tfrac{1}{4}|x_1 - x_2| \quad et \quad |x_1 - x_2| = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2 \quad (1.5) \end{aligned}$$

6- Montrons que $f_1$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $f_1(\mathbb{R}^2)$

$f_1 \in C^1$, d'après la question 5 $f_1$ est injective et $Df_1(x,y) \in Iso(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, le théorème d'inversion

globale implique que $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(\mathbb{R}^2)$ est un difféomorphisme. (01)
$D\varphi^{-1}(q) = (D\varphi(p))^{-1}$

$$(D\varphi_p)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D\varphi_q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -1 \end{pmatrix} \qquad (01.5)$$

**Exercice 2**:(07 pts)

1- Posons $f(x,y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 1 + 2y + 3y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2 \neq 0$ (01)

puisque $f(-1,1) = 0$, le théorème des fonctions implicites s'applique, et il existe $\varphi : I \to J$

de classe $C^1$ tel que $y = \varphi(x)$ au voisinage $(-1,1)$ (01)

2- Le développement de Taylor de $\varphi$ à l'ordre 2 centré en $x = -1$

$$\varphi(x) = \varphi(-1) + \varphi'(-1)(x+1) + \frac{\varphi''(-1)}{2}(x+1)^2 + o(x^2) \quad (0.5)$$

on a $\varphi(-1) = 1$ (0.5), $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 3x^2y^2$ (0.5)

$\varphi'(-1) = \frac{1}{2}$ (01), $\varphi''(-1) = -\frac{27}{4}$ (1.5)

d'où $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{27}{8}(x+1)^2 + o(x^2)$ (01)

**Exercice 3**: (06 pts) On considère $f(x, y) = (y^2 - x^2)(y - 3)$

1- Le vecteur gradient et la matrice hessienne de $f$

$$\nabla f(x, y) = (\frac{-\sin(x)}{y^2+1}, \cos(x)\frac{-2y}{(y^2+1)^2}) \quad \color{red}{(01)}$$

$$Hessf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(x)}{y^2+1} & \sin(x)\frac{2y}{(y^2+1)^2} \\ \sin(x)\frac{2y}{(y^2+1)^2} & \cos(x)\frac{6y^2-2}{(y^2+1)^3} \end{pmatrix} \color{red}{(01)}$$

2- Les points critiques de $f$ et leur nature

$$\frac{-\sin(x)}{y^2+1} = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad \text{comme} \quad y^2+1 \neq 0 \qquad \color{red}{(01)}$$

- $(k\pi, 0)$, si k est pair dans ce cas $\sin(k\pi) = 0, \cos(k\pi) = -1$ $\color{red}{(0.5)}$

- La matrice hessiene de $f$ vaut donc

$$Hessf(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \color{red}{(0.5)}$$

et $det(H_f(k\pi, 0) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) < 0$ donc $(k\pi, 0)$ est maximum local $\color{red}{(0.5)}$

- $(k\pi, 0)$, si k est impair dans ce cas $\sin(k\pi) = 0, \cos(k\pi) = 1$ $\color{red}{(0.5)}$

- La matrice hessiene de $f$ vaut donc

$$Hessf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \color{red}{(0.5)}$$

et $det(H_f(k\pi, 0) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) > 0$ donc $(k\pi, 0)$ est minimum local $\color{red}{(0.5)}$